АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ имени В.И.РОМАНОВСКОГО

на правах рукописи

ЭШАНОВ АЛИШЕР АЛИМДЖАНОВИЧ

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ

СМЕШАННОГО ТИПА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

01.01.02-дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

ТАШКЕНТ-1997

СОДЕРЖАНИЕ

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ВВЕДЕНИЕ | ................................................................................................... | 3 |
| ГЛАВА I. | ЛОКАЛЬНЫЕ И НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ............................ | 13 |
|  | 1. Постановка задачи  и единственность её решения..... | 14 |
|  | 2. Исследование краевых задач для уравнения (1.1) при .................................................................................... | 21 |
|  | 3. Существование решения задачи ................................. | 30 |
|  | 4. Постановка и единственность решения задачи ....... | 49 |
|  | 5. Существование решения задачи ............................... | 54 |
|  |  |  |
| ГЛАВА II. | АНАЛОГ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ............................................................. | 57 |
|  | 1. Задача Коши-Гурса............................................................. | 58 |
|  | 1.1. Классы обобщённых решений..................................... | 58 |
|  | 1.2. Исследование задачи Коши-Гурса.  Основные функциональные соотношения................. | 64 |
|  | 2. Задача для уравнения (2.1). Единственность решения задачи ................................................................ | 71 |
|  | 3. Существование решения задачи ................................ | 84 |
|  | 3.1. Сведение к системе интегральных  уравнений...................................................................... | 84 |
|  | 3.2. Исследование правых частей и ядер системы  интегральных уравнений ............................................. | 90 |
|  | ЛИТЕРАТУРА........................................................................... | 99 |

**ВВЕДЕНИЕ**

Теория уравнений смешанного типа составляет один из важных современных разделов теории дифференциальных уравнений с частными производными. Уравнения смешанного типа важны в связи с их многочленными приложениями в газовой динамике, теории оболочек, гидродинамике, теории упругости, трансзвуковой газовой динамике и др.

Начало исследованиям краевых задач для уравнений смешанного типа было положено в работах Ф. Трикоми [43] и получило развитие в работах С. Геллерстедта [49], Ф.И. Франкля [45], А.В. Бицадзе [6]. К.И. Бабенко [1].

В дальнейшем теория краевых задач для уравнений смешанного типа развивалась в работах В.Ф. Волкодавова, В.Н. Врагова, Т.Д.Джураева, Т.Ш. Кальменова, М.М. Мередова, Е.И. Моисеева, А.М. Нахушева, С.П. Пулькина, М.С. Салахитдинова, М.М. Смирнова и их учеников.

Задача Трикоми и её аналоги для уравнений смешанного типа с одной и двумя линиями вырождения, когда коэффициенты при младших членах являются непрерывными функциями, исследовваны многими авторами. Следует отметить работы С.П. Пулькина [29], В.Ф. Волкодавова [8], М.С. Салахитдинова, А. Толипова [36], М.С. Салахитдинова, Т.С. Саматова [35], М.С. Салахитдинова, Б.Исломова [33]. А.М. Нахушева [25], Х.М. Наджафова [24], Л.С. Чубенко [48], Б.Т. Монова [22], Б. Менгзияева [19], А.К. Уринова [44], Б. Исломова [13] и др.

В последние годы одним из интенсивно развивающихся направлений в теории дифференциальных уравнений с частными производными являются уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами.

Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического, параболо-гиперболического типов с одной линией вырождения и сингулярными коэффициентами при младших членах исследованы в работах [10], [7], [3], [4], [31], [20], [42].

Как нам известно, изучению краевых задач для сингулярных уравнений эллиптического и гиперболического типов с двумя линиями вырождения посвящены работы [30], [27], [28], [17], [16], [15].

Однако, краевые задачи для сингулярных уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения мало изучены. Отметим работы [9], [47].

Настоящая работа посвящена исследованию как локальных, так и нелокальных краевых задач для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения и сингулярными коэффициентами при младших членах.

В первой главе, состоящей из пяти параграфов, исследуются локальные и нелокальные краевые задачи для уравнения

 (1)

где кусочно-постоянные, причём





Пусть конечная односвязная область плоскости переменных (х,у), ограниченная при х>0, y>0 гладкой кривой  с концами в точках А(1,0), В(0,1), а при x<0, y>0 и x>0, y<0 характеристиками



уравнения (1).

Введём обозначения:



В 1 главы I даётся постановка задачи  для уравнения (1) и доказывается единственность её решения.

**Задача .** Найти решение  уравнения (1) в областях , удовлетворяющее краевым условиям

 (2)

 (3)

и условиям сопряжения

, (4)

 (5)

где -заданные функции, причём .

Доказана следующая теорема-аналог принципа экстремума А.Б.Бицадзе.

**Теорема 1.1.** Решение задачи , принимающее нулевые значения на характеристиках ОС и ОD, положительный максимум и отрицательный минимум в замкнутой области  принимает на кривой σ.

Справедливость теоремы 1.1. основана на следующих леммах.

**Лемма 1.1.** Пусть  решение уравнение (1), обращающееся в нуль на характеристике ОD [OC] принимает свой положительный максимум (отрицательный минимум) в точке .

Тогда

 (6)

[ ], (7)

при условии, что этот предел существует.

**Лемма 1.2.** Пусть в области  функция  удовлетворяет неравенству  и принимает наибольшее положительное (наименьшее отрицательное) значение в точках  и . Если значения  на σ меньше (больше), чем  и , то

, (8)

, (9)

при условии, что эти пределы существуют.

Единственность решения задачи  вытекает из теоремы 1.1.

Отметим, что при исследовании существования решения задачи  важную роль играет изучение краевых задач для вырождающегося эллиптического уравнения с сингулярными коэффициентами

, (10)

которые ранее не были исследованы. Поэтому второй параграф главы I посвящён постановке и исследованию задач N и D.

Пусть -область, ограниченная отрезками  оси х-ов, оси у-ов и нормальной кривой

,

с концами в точках , лежащей в первом квадранте .

**Определение 1.1.** Регулярным решением уравнения (10) в области  будем называть функцию , удовлетворяющую этому уравнению в области .

**Задача N.** Найти в области  регулярное решение уравнения (10), удовлотворяющее краевым условиям

 (11)

где -заданные функции, причем  при  функция  может обращатья в бесконечность порядка меньше , при  в бесконечность порядка меньше .

**Задача D**. Найти в области  регулярное решение уравнения (10), удовлетворяющее краевым условиям:

 (12)

где -заданные функции, причем



В 3 главы I доказывается существование решения задачи  для уравнения (1) в случаях:



Основным результатом 4-5 главы I является доказательство существования и единственности решения задачи БСα,β:

**Задача БСα,β­.** Найти решение  уравнения (1), удовлетворяющее всем условиям задачи , кроме условия (3), которое заменяется условием

 (13)

где  и функция  имеет особенность порядка меньше  при  а при  меньше -аффикс точки пересечения характеристики уравнения (1), выходящей из точки  с характеристикой OD (OC),

 (14)

а - оператор обобщённого интегрирования дробного порядка с (с>0) от функции [37]:



где  при  

Вторая глава, состоящая из трех параграфов, посвящена постановке и исследованию аналога задачи Трикоми в области  для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами:

 (15)

где -кусочно-постоянные числа, т.е. , если -заданная функция в .

Будем предпологать, что постоянные  и функция с(х,у) удовлетворяют условиям







где  при  при .

В п. 1.1 1 главы II вводятся классы обобщенных решений для уравнения (15) в областях  и изучаются свойства этих решений.

Решение видоизменённой задачи Коши для уравнения (15) в области  даётся формулой

 (19)

где











функция Римана для уравнения (15) в области  определяются из (14).

**Определение 2.1**. Обобщенным решением класса  уравнения (15) в области  назовем функцию , определяемую формулой (19), где  и  - функции, удовлетворяющие условию Гёльдера с показателями и  при  соответственно.

Доказаны следующие леммы:

**Лемма 2.1**. Если -обобщенное решение класса  уравнения (15) в области  , то  и  непрерывны в , а  непрерывна вплоть до линии вырождения  и



**Лемма 2.2.** Для любого обобщенного решения уравнения (15) можно найти последовательность регулярных решений уравнения (15), таких, что в любой замкнутой области  будем иметь



и для любого  при 



где -образ области  на плоскости .

В п. 1.2 1 главы II в области  для уравнения (15) исследуется задача Коши-Гурса и выписывается её решение в форме, удобной для дальнейших исследований различных краевых задач.

В 2 дается постановка аналога задачи Трикоми и доказывается единственность её решения.

**Задача.** Требуется найти функцию , обладающую следующими свойствами:

1) ;

2) - дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (15) в области ;

3) - обобщенное решение уравнения (15) класса  в области  и класса  в области ;

4)  удовлетворяет краевым условиям

 (20)

и условиям сопряжения





при условии, что эти пределы существуют, где - заданные функции, причем 





где 

Установлены следующие леммы:

**Лемма 2.4**. Пусть выполнены условия (16), (17) и



Тогда, если  в области  решение уравнения (15), обращающееся в нуль на характеристиках OD и OC, то

.

**Лемма 2.5.** Пусть  решение уравнения (15) в области , обладающее следующими свойствами:

1) 

2) функция  непрерывна при  , при  может обращаться в бесконечность порядка меньше , а при  в бесконечность порядка меньше ;

3)  обращается в нуль на кривой ;

4) .

Тогда имеет место формула

.  
Единственность решения задачи  следует из лемм 2.4., 2.5.

В 3 методом интегральных уравнений доказывается существование решения задачи .

Результаты диссетации опубликованы в работах [52-56] и докладывались на объединённом семинаре отделов дифференциальных уравнений и неклассических уравнений математической физики Института математики им В.И.Романовского АН Республики Узбекистан ( Руководители-академики АН РУз М.С. Салахитдинов и Т.Д. Джураев), на конференциях молодых ученых, посвящённых памяти В.И. Романовского (г.Ташкент, 1992-1995 г.г.), на республиканской научной конференции “Дифференциальные уравнения и их приложения” (г. Ош, 1993 г.) на Международной научной конференции “Вырождающиеся уравнения и уравнения смешанного типа” (г.Ташкент, 1993г.), на семинаре кафедры теории оптимального управления механико-математического факультета ТашГУ (руководитель: член-корр. АН Руз Н.Ю. Сатимов).

Пользуясь случаем, выражаю глубокую благодарность моему научному руководителю академику АН Руз Махмуду Салахитдиновичу Салахитдинову и старшему научному сотруднику Бозору Исломовичу Исломову за постановку задач, ценные советы и постоянное внимание при выполнении настоящей работы.